Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. **Л.Г. АФРАЙМОВИЧ, д-р физ.-мат. наук (levafraimovich@gmail.com),**
М.Д. ЕМЕЛИН (makcum888e@mail.ru)
(Нижегородский государственный университет)

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТИ ПАРЕТО ПРИ КОМБИНИРОВАНИИ ДОПУСТИМЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Рассматривается двухкритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях, которая уже в однокритериальном случае является одной из классических NP-трудных задач. В рамках данной постановки ставится задача комбинирования допустимых решений, представляющая собой задачу о назначениях на множестве решений, которые содержат только компоненты выбранных допустимых решений. Предлагается полиномиальный алгоритм нахождения Парето-оптимальных решений в задаче комбинирования двух допустимых решений. На его основе строится эвристический подход оценки области Парето многокритериальной аксиальной задачи о назначениях.

Ключевые слова: аксиальная задача о назначениях, многоиндексные задачи, многокритериальные задачи, Парето-оптимальность, комбинирование решений, полиномиальная разрешимость, NP-трудность.

DOI: 10.31857/S0005231025050056, **EDN:** AXKFNW

1. Введение

Существует широкий класс прикладных задач, формализуемых в виде многоиндексных аксиальных задач о назначениях, в качестве примера можно выделить задачи распределения ресурсов, планирования, трекинга объектов, роботизированной логистики [1–5] и др. В общем случае класс многоиндексных аксиальных задач о назначениях является NP-трудным уже в трехиндексном случае [6]. Известны частные полиномиально разрешимые подклассы [1, 7] и подклассы, для которых существуют полиномиальные приближенные алгоритмы [1, 8, 9]. Аксиальная трехиндексная задача о назначениях исследуется в [10–16], где обсуждаются вопросы построения приближенных подходов и реализации точных алгоритмов. Многокритериальные постановки многоиндексных задач о назначениях обсуждаются в [17–20].

В данной работе рассматривается вопрос построения области Парето двухкритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях. Сформулирована задача комбинирования допустимых решений, представляющая собой многокритериальную задачу о назначениях на множестве решений, получаемых комбинированием компонент заданных допустимых решений. Предложен полиномиальный алгоритм построения подмножества Парето-оптимальных решений на множестве комбинаций двух допустимых решений. Данный алгоритм применен при построении эвристического алгоритма аппроксимации области Парето двухкритериальной трехиндексной задачи о назначениях. Проведен вычислительный эксперимент, иллюстрирующий данный подход. Работа является продолжением серии статьей [21–24], в которых обсуждаются вопросы комбинирования решений аксиальной задачи о назначениях.

Далее статья построена следующим образом. В разделе 2 приводится постановка двухкритериальной трехиндексной аксиальной задачи о назначениях и соответствующей задачи комбинирования допустимых решений. В разделе 3 описывается алгоритм нахождения подмножества Парето-оптимальных решений задачи комбинирования. В разделе 4 приводятся результаты вычислительных экспериментов.

2. Постановка задачи

Пусть I, J, K – непересекающиеся множества индексов, $I \cap J = \emptyset$, $I \cap K = \emptyset$, $J \cap K = \emptyset$ и $|I| = |J| = |K| = n$; $c_{ijk}, d_{ijk}, i \in I,\ j \in J,\ k \in K$ – трехиндексные матрицы стоимостей; x_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – трехиндексная матрица неизвестных. Тогда двухкритериальная трехиндексная аксиальная задача о назначениях ставится как следующая задача целочисленного линейного программирования:

(1) $$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_{ijk} = 1, \quad k \in K,$$

(2) $$\sum_{i\in I}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \quad j \in J,$$

(3) $$\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} x_{ijk} = 1, \quad i \in I,$$

(4) $$x_{ijk} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad k \in K,$$

(5) $$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk} \to \min,$$

(6) $$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} d_{ijk}x_{ijk} \to \min\,.$$

Для удобства двухкритериальную задачу (1)–(6) обозначим через Z_2. Обозначим:

$$C(x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} c_{ijk}x_{ijk},$$
$$D(x) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{k\in K} d_{ijk}x_{ijk}.$$

Тогда x^* называется Парето-оптимальным решением задачи Z_2, если x^* удовлетворяет системе ограничений (1)–(4); не существует x', удовлетворяющего системе ограничений (1)–(4), такого, что при этом $C(x^*) > C(x')$ и $D(x^*) \geqslant D(x')$ или $C(x^*) \geqslant C(x')$ и $D(x^*) > D(x')$.

Как известно, (однокритериальная) аксиальная задача о назначениях (1)–(5) является NP-трудной [6]. Отсюда несложно увидеть, что задача построения Парето-оптимального решения двухкритерильной аксиальной задачи о назначениях Z_2 также является NP-трудной. Для доказательства необходимо в соответствующей задаче Z_2 определить $c_{ijk} = d_{ijk}$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Утверждение 1. Задача построения Парето-оптимального решения задачи Z_2 является NP-трудной.

Таким образом, актуальным является вопрос построения эффективных эвристических подходов при оценке Парето-области задачи Z_2. Предлагаемый в данной работе эвристический подход основан на идее комбинирования допустимых решений задачи Z_2. Под комбинированием здесь понимается решение задачи на множестве решений, которые содержат только компоненты заданных допустимых решений.

Приведем постановку задачи комбинирования. Пусть задано множество $W \subset I \times J \times K$, которое определяет подмножество разрешенных назначений. Введем вспомогательное ограничение

$$x_{ijk} = 0, \quad (i,j,k) \notin W. \tag{7}$$

Двухкритериальную задачу (1)–(4), (7), (5), (6) для заданного множества W будем обозначать через $Z_2(W)$. Очевидно задача (1)–(6) соответствует задаче $Z_2(I \times J \times K)$.

Тогда x^* называется Парето-оптимальным решением задачи $Z_2(W)$, если x^* удовлетворяет системе ограничений (1)–(4), (7); не существует x', удовлетворяющего системе ограничений (1)–(4), (7), такого, что при этом $C(x^*) >$ $> C(x')$ и $D(x^*) \geqslant D(x')$ или $C(x^*) \geqslant C(x')$ и $D(x^*) > D(x')$.

Проблема проверки совместности системы ограничений задачи $Z_2(W)$, т.е. системы (1)–(4), (7), для произвольного множества W является NP-полной [1]. При решении задачи комбинирования будем рассматривать такие множества W, которые соответствуют назначениям заданного подмножества допустимых решений.

Пусть x_{ijk}, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – допустимое решение системы ограничений (1)–(4). Тогда через $W(x)$ обозначим следующее множество разрешенных назначений:

$$W(x) = \{(i,j,k) | x_{ijk} = 1, i \in I, j \in J, k \in K\}.$$

Рассмотрим $x^1_{ijk}, x^2_{ijk}, \ldots, x^r_{ijk}$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$ – произвольные r допустимых решений системы ограничений (1)–(4). Тогда

$$W(x^1, x^2, \ldots, x^r) = W(x^1) \cup W(x^2) \cup \ldots \cup W(x^r).$$

Таким образом, далее будем рассматривать задачу $Z_2(W(x^1, x^2, \ldots, x^r))$.

3. Построение подмножества Парето-оптимальных решений

Пусть $r = 2$ и x^1, x^2 – заданные допустимые решения системы ограничений (1)–(4). Тогда рассмотрим задачу $Z_2(W(x^1, x^2))$ и вопрос построения ее Парето-оптимальных решений.

Алгоритм 1. Построение подмножества Парето-оптимальных решений задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$.

Шаг 1. Построить граф $G = (V, A)$, где
$V = \{I \cup J \cup K\}$, $A = \{(i,j), (i,k), (j,k) | (i,j,k) \in W(x^1, x^2)\}$.

Шаг 2. Найти компоненты связности V_l, $l = \overline{1,q}$ графа G и построить подграфы $G_l = (V_l, A_l)$, $l = \overline{1,q}$, порожденные соответствующими компонентами связанности.

Шаг 3. Построить следующие множества:

$$D^1_l = \left\{(i,j,k) | (i,j,k) \in W(x^1), (i,j), (i,k), (j,k) \in A_l\right\}, \quad l = \overline{1,q},$$
$$D^2_l = \left\{(i,j,k) | (i,j,k) \in W(x^2), (i,j), (i,k), (j,k) \in A_l\right\}, \quad l = \overline{1,q}.$$

Шаг 4. Пусть

$$P_l = \left\{ p \,\middle|\, \sum_{(i,j,k) \in D^p_l} c_{ijk} = \min_{p' \in \{1,2\}} \sum_{(i,j,k) \in D^{p'}_l} c_{ijk},\ p \in \{1,2\} \right\},$$

$$p_l = \operatorname*{argmin}_{p \in P_l} \sum_{(i,j,k) \in D^p_l} d_{ijk}, \quad l = \overline{1,q}.$$

Шаг 5. Построим Парето-оптимальное решение x^{*0} по следующему алгоритму. Пусть $x^{*0}_{ijk} := 0$, $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Далее для каждого $l = \overline{1,q}$ выполнить $x^{*0}_{ijk} := 1, (i,j,k) \in D^{p_l}_l$.

Шаг 6. Построим следующее множество индексов компонент связности:

$$L = \left\{ l \,\middle|\, \sum_{(i,j,k)\in D_l^{\overline{p_l}}} c_{ijk} > \sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l}} c_{ijk} \quad \text{и} \right.$$

$$\left. \sum_{(i,j,k)\in D_l^{\overline{p_l}}} d_{ijk} < \sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l}} d_{ijk},\ l \in \{1,\ldots,q\} \right\},$$

здесь для удобства обозначим $\overline{p} = 3 - p$ при $p \in \{1,2\}$.

Шаг 7. Упорядочим это множество в порядке невозрастания величины $tg(l)$, где

$$tg(l) = \frac{\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l}} d_{ijk} - \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{\overline{p_l}}} d_{ijk}}{\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{\overline{p_l}}} c_{ijk} - \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l}} c_{ijk}},$$

т.е. пусть $L = \{l_1,\ldots,l_{|L|}\}$ и $tg(l_s) \geqslant tg(l_{s+1}),\ s = \overline{1,|L|-1}$.

Шаг 8. Построим $|L|$ Парето-оптимальных решений x^{*s}, $s = \overline{1,|L|}$ следующим способом.

Пусть $x^{*s}_{ijk} := 0,\ i \in I,\ j \in J,\ k \in K$, далее для каждого $t = \overline{1,|q|}$ выполнить:

если $t \in \{l_1,\ldots,l_s\}$, то $x^{*s}_{ijk} := 1, (i,j,k) \in D_t^{\overline{p_t}}$,

иначе $x^{*s}_{ijk} := 1, (i,j,k) \in D_t^{p_t}$.

Приведем численный пример, иллюстрирующий работу алгоритма 1.

Пример 1. Пример работы алгоритма 1.

Пусть $n = 6$, матрицы c_{ijk}, d_{ijk} заданы следующим образом:

$$c_{ijk} = \begin{cases} 0, (i,j,k) \in \{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,1),(3,3,3),(4,4,4),(3,3,4), \\ \qquad\qquad (5,5,5),(5,5,6),(6,6,5)\}, \\ 1, (i,j,k) \in \{(4,4,3)\}, \\ 2, (i,j,k) \in \{(6,6,6)\}, \\ 3, (i,j,k) \in \{(2,2,2)\}, \\ 10 \text{ иначе}. \end{cases}$$

$$d_ijk = \begin{cases} 0, (i,j,k) \in \{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,3),(3,3,4), \\ \qquad\qquad (5,5,5),(5,5,6),(6,6,6)\}, \\ 1, (i,j,k) \in \{(2,2,1),(4,4,4)\}, \\ 4, (i,j,k) \in \{(6,6,5)\}, \\ 10 \text{ иначе}. \end{cases}$$

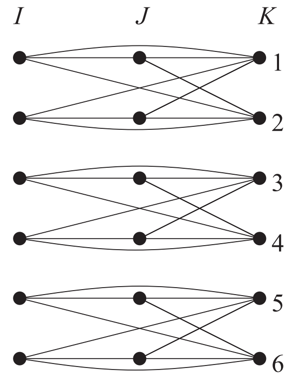

Рис. 1. Граф G шага 1.

Рассмотрим два допустимых решения x^1, x^2:

$$x^1_{ijk} = \begin{cases} 1, (i,j,k) \in \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$x^2_{ijk} = \begin{cases} 1, (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,4),(4,4,3),(5,5,6),(6,6,5)\}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Опишем работу алгоритма 1 на данном численном примере.

Граф G, полученный на шаге 1, представлен на рис. 1.

На шаге 2 строятся компоненты связности графа G. Как видим, граф G имеет три компоненты связности одинаковой структуры. Соответственно множества, получаемые на шаге 3, имеют следующий вид:

$$D^1_1 = \{(1,1,1),(2,2,2)\}, \quad D^1_2 = \{(3,3,3),(4,4,4)\}, \quad D^1_3 = \{(5,5,5),(6,6,6)\},$$
$$D^2_1 = \{(1,1,2),(2,2,1)\}, \quad D^2_2 = \{(3,3,4),(4,4,3)\}, \quad D^2_3 = \{(5,5,6),(6,6,5)\}.$$

На шаге 4 получим:

$$P_1 = \{2\}, \quad p_1 = 2,$$
$$P_2 = \{1\}, \quad p_2 = 1,$$
$$P_3 = \{2\}, \quad p_3 = 2.$$

На шаге 5 первое полученное Парето-оптимальное решение x^{*0} будет построено следующим способом:

$$x^{*0}_{ijk} = \begin{cases} 1, (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,6),(6,6,5)\}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

Значения критериев, достигаемые этим решением, равны $C(x^{*0}) = 0$, $D(x^{*0}) = 6$.

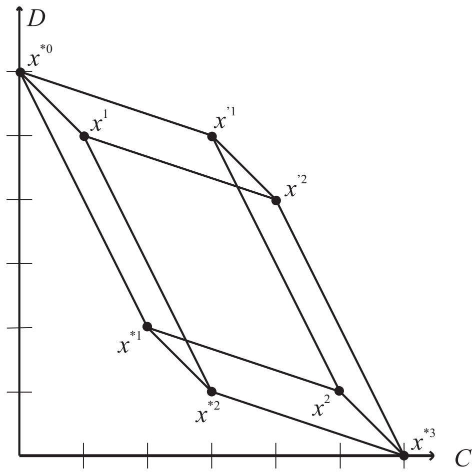

Рис. 2. Найденные решения на плоскости CD.

На шаге 6 множество L будет содержать все три компоненты связности и будет упорядочено на шаге 7 следующим образом: $l_1 = 3$, $l_2 = 2$, $l_3 = 1$. Следующие три Парето-оптимальные решения, построенные на шаге 8, имеют вид:

$$x^{*1}_{ijk} = \begin{cases} 1, (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,3),(4,4,4),(5,5,5),(6,6,6)\}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$x^{*2}_{ijk} = \begin{cases} 1, (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,4),(4,4,3),(5,5,5),(6,6,6)\}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

$$x^{*3}_{ijk} = \begin{cases} 1, (i,j,k) \in \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,4),(4,4,3),(5,5,5),(6,6,6)\}, \\ 0 \text{ иначе.} \end{cases}$$

И соответствующие им значения критериев:

$$\begin{aligned} C(x^{*1}) &= 2, \quad D(x^{*1}) = 2, \\ C(x^{*2}) &= 3, \quad D(x^{*2}) = 1, \\ C(x^{*3}) &= 6, \quad D(x^{*3}) = 0. \end{aligned}$$

Полученные решения отображены на плоскости CD, согласно значению их критерия (см. рис. 2). Здесь x^1, x^2 – исходные решения, $x^{*0}, x^{*1}, x^{*2}, x^{*3}$ – найденные алгоритмом 1 Парето-оптимальные решения задачи комбинирования, x'^1, x'^2 – возможные решения задачи комбинирования. Как можно увидеть на данном примере, кроме найденных алгоритмом решений, существует еще одно Парето-оптимальное решение x^1.

Далее докажем корректность алгоритма 1.

Рассмотрим многокритериальную задачу. Пусть $X \subseteq R^n$ – множество допустимых решений задачи, $\overrightarrow{f(x)} \in R^m$ – целевая функция задачи, $f_i(x) \to \min$, $i = \overline{1,m}$.

Утверждение 2. Пусть множество $X \subseteq R^n$ конечно. Если $x \in X$ не является Парето-оптимальным решением, то существует Парето-оптимальное решение $y \in X$, доминирующее над x, т.е. $f_i(y) \leqslant f_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, и существует $j \in \{1, \ldots, m\}$ такой,что $f_j(y) < f_j(x)$.

Доказательство. Пусть выполняются условия утверждения и $x \in X$ не является Парето-оптимальным решением. Тогда построим алгоритм нахождения такого решения y.

Шаг 1. Найти решение x', доминирующее над решением x. Если бы такого решения не нашлось, то решение x было бы Парето-оптимальным, что привело бы к противоречию.

Шаг 2. $x := x'$, если x Парето-оптимальное, вернуть x, иначе перейти на шаг 1.

Из определения Парето-оптимальности следует, что количество шагов 2 алгоритма не превысит мощности множества решений. Так как множество конечно, то алгоритм найдет Парето-оптимальное решение за конечное число шагов. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Любое допустимое решение x, удовлетворяющее системе ограничений задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$, может быть построено путем выбора троек только из первого или только из второго решения для каждой компоненты связности независимо.

Доказательство. Данное утверждение было показано в доказательстве теоремы 1 из [21].

Тогда введем:

$$p_l(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x_{ijk} = 1, \text{ для всех } (i,j,k) \in D_l^1, \\ 2, \text{ если } x_{ijk} = 1, \text{ для всех } (i,j,k) \in D_l^2. \end{cases}$$

Утверждение 4. Для любого Парето-оптимального решения x' задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$ выполняется:

$$\sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x')}} c_{ijk} = \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x^{*0})}} c_{ijk} \quad \textit{и} \quad \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x')}} d_{ijk} = \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x^{*0})}} d_{ijk}, \quad l \notin L.$$

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существует Парето-оптимальное решение x', для которого найдется $l \notin L$, такое что

$$\sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x')}} c_{ijk} \neq \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x^{*0})}} c_{ijk} \quad \text{или} \quad \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x')}} d_{ijk} \neq \sum_{(i,j,k) \in D_l^{p_l(x^{*0})}} d_{ijk}.$$

Рассмотрим два случая:

1. $\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} c_{ijk} \neq \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} c_{ijk}$. Согласно шагу 5 алгоритма 1 выполняется

$$\sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} c_{ijk} > \sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} c_{ijk}.$$

Тогда

а) если $\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} d_{ijk} < \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} d_{ijk}$, то $l \in L$, получаем противоречие,

б) иначе выполняется $\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} d_{ijk} \geqslant \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} d_{ijk}$, тогда в решении x' тройки, соответствующие компоненте связности l, можно заменить следующим образом:

$$x'_{ijk} := 0,\ (i,j,k) \in D_l^{p_l(x')},$$
$$x'_{ijk} := 1,\ (i,j,k) \in D_l^{p_l(x^{*0})},$$

уменьшив при этом значение обоих критериев, следовательно, x' – не Парето-оптимальное решение, получаем противоречие.

2. $\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} c_{ijk} = \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} c_{ijk}$, $\sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} d_{ijk} \neq \sum\limits_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} d_{ijk}$. Согласно шагу 5 алгоритма 1 выполняется

$$\sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x')}} d_{ijk} > \sum_{(i,j,k)\in D_l^{p_l(x^{*0})}} d_{ijk},$$

тогда в решении x' тройки, соответствующие компоненте связности l, можно заменить следующим образом:

$$x'_{ijk} := 0,\ (i,j,k) \in D_l^{p_l(x')},$$
$$x'_{ijk} := 1,\ (i,j,k) \in D_l^{p_l(x^{*0})},$$

уменьшив при этом значение обоих критериев, следовательно, x' – не Парето-оптимальное решение, получаем противоречие. Утверждение доказано.

Обозначим прямую, соединяющую точки x^{*t}, x^{*t+1} на плоскости CD, как P_t, $t = \overline{1,|L|}$. Запишем уравнение прямой P_t:

$$\frac{D - D(x^{*t})}{D(x^{*t-1}) - D(x^{*t})} = \frac{C - C(x^{*t})}{C(x^{*t-1}) - C(x^{*t})}.$$

Для удобства приведем уравнение к виду

$$D = D(x^{*t}) + \frac{D(x^{*t}) - D(x^{*t-1})}{C(x^{*t-1}) - C(x^{*t})}(C(x^{*t}) - C) = D(x^{*t}) + tg(l_t)(C(x^{*t}) - C).$$

Уравнение прямой также можно записать в виде

$$D = D(x^{*t-1}) + tg(l_t)(C(x^{*t-1}) - C).$$

Будем говорить, что допустимое решение x задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$ лежит не ниже прямой P_t, если

$$D(x) \geqslant D(x^{*t}) + tg(l_t)(C(x^{*t}) - C(x)).$$

Несложно увидеть, что если решение x лежит не ниже прямой P_t, то решение x не будет доминировать ни над одним из решений x^{*t-1}, x^{*t}.

Утверждение 5. Если для некоторого $e \in \{1, \ldots, |L|\}$ решение x лежит не ниже прямой P_e и $C(x) \leqslant C(x^{*e})$, то оно лежит не ниже любой прямой $P_t,\ t = \overline{e, |L|}$.

Доказательство. Так как x лежит не ниже прямой P_e, то

$$D(x) \geqslant D(x^{*e}) + tg(l_e)(C(x^{*e}) - C(x)).$$

По построению $tg(l_t) \geqslant tg(l_{t+1}) \geqslant 0,\ t = \overline{1, |L| - 1}$. Из условия утверждения $(C(x^{*e}) - C(x)) \geqslant 0$. Отсюда

$$tg(l_e)(C(x^{*e}) - C(x)) \geqslant tg(l_{e+1})(C(x^{*e}) - C(x))$$

и, следовательно,

$$D(x) \geqslant D(x^{*e}) + tg(l_{e+1})(C(x^{*e}) - C(x)),$$

т.е. решение x лежит не ниже прямой P_{e+1}. Отсюда по индукции получили, что x лежит не ниже прямой P_t, $t \geqslant e$. Утверждение доказано.

Теорема 1. Не существует Парето-оптимального решения x' задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$, доминирующего над каким-либо из решений, построенных алгоритмом 1.

Доказательство. Доказательство от противного. Предположим, что существует Парето-оптимальное решение x', доминирующее хотя бы над одним из решений $x^{*0}, \ldots, x^{*|L|}$, построенных алгоритмом. Из утверждения 4 следует, что такое решение может отличаться от x^{*0} только в тройках компонент $l \in L$.

Построим $|L| + 1$ решение $x''^s,\ s = \overline{0, |L|}$ следующим способом:

Шаг 1. Пусть $x''^s_{ijk} := 0,\ i \in I,\ j \in J,\ k \in K$.

Шаг 2. Далее для каждого $t = \overline{1, q}$ выполнить:

– если $t \in \{l_1, \ldots, l_s\}$ и $p_t(x') \neq p_t(x^{*0})$, то $x''^s_{ijk} := 1,\ (i, j, k) \in D_t^{\overline{p_t}}$,

– иначе $x''^s_{ijk} := 1,\ (i, j, k) \in D_t^{p_t}$.

По построению $x''^0 = x^{*0}$, отсюда решение x''^0 лежит не ниже прямой P_1.

Покажем, что если решение x''^s лежит не ниже прямых $P_t,\ t = \overline{1, |L|}$, то и решение x''^{s+1} лежит не ниже прямых $P_t,\ t = \overline{1, |L|}$.

Для каждой из прямых $P_t,\ t = \overline{1, r + 1}$ возможны два случая:

1. $p_{l_{s+1}}(x') = p_{l_{s+1}}(x^{*0})$, тогда решение x''^{s+1} совпадает с решением x''^s, а значит, оно не ниже прямой P_t,

2. $p_{l_{s+1}}(x') \neq p_{l_{s+1}}(x^{*0})$, тогда из условия, что решение x''^s лежит не ниже прямой P_t, следует, что

$$D(x''^s) \geqslant D(x^{*t}) + tg(l_t)(C(x^{*t}) - C(x''^s)). \tag{8}$$

Из построения:

$$D(x''^{s+1}) = D(x''^s) + tg(l_{s+1})(C(x''^s) - C(x''^{s+1})).$$

Применим неравенство (8):

$$D(x''^{s+1}) \geqslant D(x^{*t}) + tg(l_t)(C(x^{*t}) - C(x''^s)) + tg(l_{s+1})(C(x''^s) - C(x''^{s+1})).$$

Отсюда:

$$D(x''^{s+1}) \geqslant D(x^{*t}) + tg(l_t)(C(x^{*t}) - C(x''^{s+1})) + \\ + (tg(l_t) - tg(l_{s+1}))(C(x''^{s+1}) - C(x''^s)).$$

По построению $C(x''^{s+1}) - C(x''^s) \geqslant 0$ и $tg(l_t) - tg(l_{s+1}) \geqslant 0$ при $s+1 \geqslant t$. Тогда:

$$D(x''^{s+1}) \geqslant D(x^{*t}) + tg(l_t)(C(x^{*t}) - C(x''^{s+1})),$$

т.е. решение x''^{s+1} не ниже прямой P_t.

Отсюда: если решение x''^s лежит не ниже прямых $P_t,\ t = \overline{1, |L|}$, то и решение x''^{s+1} лежит не ниже прямых $P_t,\ t = \overline{1, s+1}$.

По построению $C(x''^{s+1}) \leqslant C(x^{*s+1})$. Тогда по утверждению 5 решение x''^{s+1} лежит не ниже прямых P_t, $t = \overline{s+1, |L|}$ (здесь $e = s+1$). Следовательно, если решение x''^s лежит не ниже прямых P_t, $t = \overline{1, |L|}$, то решение x''^{s+1} не ниже прямых $P_t,\ t = \overline{1, |L|}$. Отсюда по индукции получаем, что $x''^{|L|}$ не ниже прямых $P_t,\ t = \overline{1, |L|}$.

По построению $x''^{|L|} = x'$, т.е. x' лежит не ниже прямых P_t, $t = \overline{1, |L|}$, а следовательно, решение x' не доминирует ни над одним из решений $x^{*0}, \ldots, x^{*|L|}$, построенных алгоритмом 1. Получаем противоречие, предположение неверно. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Решения $x^{*0}, \ldots, x^{*|L|}$, найденные алгоритмом 1, являются Парето-оптимальными решениями задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проведем от противного. Предположим, что это не так, тогда существует решение $x^{*q'}$, $q' \in \{0, \ldots, L\}$, не являющееся Парето-оптимальным решением задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$. Тогда согласно утверждению 2 существует Парето-оптимальное решение x' задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$, доминирующее над $x^{*q'}$:

$$C(x') < C(x^{*q'}) \ \text{ и } \ D(x') < D(x^{*q'}).$$

Но согласно теореме 1 такого решения x' не существует. Получаем противоречие. Предположение неверно. Теорема доказана.

У т в е р ж д е н и е 6. *Алгоритм 1 не гарантирует нахождение всего множества Парето-оптимальных решений задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$.*

Доказательство. Построим численный пример. Пусть $n = 4$ и

$$x^1_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4)\}, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$x^2_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,4),(4,4,3)\}, \\ 0 \text{ иначе}. \end{cases}$$

Пусть

$$c_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4),(2,2,1),(4,4,3)\}, \\ 1, \text{ если } (i,j,k) = (1,1,2), \\ 2, \text{ если } (i,j,k) = (3,3,4), \\ 5 \text{ иначе}, \end{cases}$$

$$d_{ijk} = \begin{cases} 0, \text{ если } (i,j,k) \in \{(2,2,2),(4,4,4),(1,1,2),(2,2,1),(3,3,4),(4,4,3)\}, \\ 1, \text{ если } (i,j,k) = (1,1,1), \\ 2, \text{ если } (i,j,k) = (3,3,3), \\ 5 \text{ иначе}. \end{cases}$$

Тогда существует четыре допустимых решения задачи комбинирования:

$$x^{*1}_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,3),(4,4,4)\}, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases}$$

здесь $C(x^{*1}) = 0,\ D(x^{*1}) = 3$;

$$x^{*2}_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,4),(4,4,3)\}, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases}$$

здесь $C(x^{*2}) = 3,\ D(x^{*2}) = 0$;

$$x^{*3}_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,2),(2,2,1),(3,3,3),(4,4,4)\}, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases}$$

здесь $C(x^{*3}) = 1,\ D(x^{*3}) = 2$;

$$x^{*4}_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } (i,j,k) \in \{(1,1,1),(2,2,2),(3,3,4),(4,4,3)\}, \\ 0 \text{ иначе}, \end{cases}$$

здесь $C(x^{*4}) = 2,\ D(x^{*4}) = 1$.

Каждое из построенных четырех решений является Парето-оптимальным решением задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$. При этом $q = 2$, $|L| = 2$ и, следовательно, алгоритм 1 найдет только три решения. Утверждение доказано.

Таким образом, предложенный алгоритм 1 гарантирует построение Парето-оптимальных решений задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$, однако не гарантирует построение всей области Парето.

Теорема 3. Алгоритм 1 требует $O(n^2)$ вычислительных операций.

Доказательство.

Пусть входными данными алгоритма 1 являются допустимые решения x^1, x^2, представленные в виде коллекции троек (i, j, k) и стоимостей c_{ijk}, для которых соответствующие переменные принимают значение 1. Согласно (1)–(4) для каждого из допустимых решений количество таких троек составляет n. Тогда на шаге 1 алгоритма строится граф $G = (V, A)$, где $|V| = O(n)$, $|A| = O(n)$. На шаге 2 граф G разбивается на компоненты связности. Это осуществляется при помощи обхода графа в ширину, который требует $O(|V| + |A|) = O(n)$ вычислительных операций. На шаге 3 для входных троек алгоритма определяются соответствующие компоненты связности, этот шаг требует $O(n)$ вычислительных операций. На шаге 4 для каждой компоненты связности определяется, из какого решения будут взяты тройки в первое найденное Парето-оптимальное решение, данный шаг требует $O(n)$ вычислительных операций. На шаге 5 строится первое Парето-оптимальное решение; так как можно представить решение в виде коллекции из n троек (i, j, k), то этот шаг требует $O(n)$ вычислительных операций. На шаге 6 из всех компонент связности выбираются только те, которые соответствуют критерию, что требует $O(n)$ вычислительных операций. На шаге 7 подмножество компонент связности упорядочивается, что требует $O(n \log(n))$ вычислительных операций. И, наконец, на шаге 8 строится $O(n)$ решений, каждое из которых строится за $O(n)$ вычислительных операций. Таким образом, алгоритм 1 требует $O(n^2)$ вычислительных операций. Теорема доказана.

4. Вычислительный эксперимент

Предложенный алгоритм 1 гарантирует построение подмножества области Парето задачи $Z_2(W(x^1, x^2))$. Далее применим данный алгоритм при построении эвристических методов аппроксимации Парето области исходной задачи Z_2. Эффективность работы эвристического алгоритма будем оценивать вычислительным экспериментом.

Эксперимент 1. Построим матрицы c_{ijk}, d_{ijk} следующим способом: для каждого индекса $i \in I \cup J \cup K$ сгенерируем случайную точку p на плоскости XY так, чтобы p_x, p_y были целочисленными и равномерно распределенными на отрезке $[0{,}2^{32} - 1]$, тогда $c_{ijk} = dist(i, j) + dist(j, k) + dist(i, k)$, где $dist(a, b)$ – Манхэттенское расстояние между точками a и b. Аналогичным образом определим d_{ijk}.

Определим процедуру локальной оптимизации для допустимого решения x задачи Z_2:

Шаг 1. Равновероятно выберем случайное число $a \in [0, 1]$.

Шаг 2. Построим трехиндексную матрицу стоимостей $e_{ijk} = ac_{ijk} + (1 - a)d_{ijk}$.

Шаг 3. Применим процедуру локальной оптимизации, предложенную в [15] к решению x исходной задачи, но с критерием $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} e_{ijk} x_{ijk} \to \min$.

Построим n случайных допустимых решений $x_1, \ldots, x_n$ задачи Z_2, к каждому из которых будем применять предложенную процедуру локальной оптимизации до тех пор, пока решение не перестанет меняться. Полученные решения обозначим как $x'_1, \ldots, x'_n$. Из полученных решений выберем недоминируемые. Обозначим построенную из этих решений аппроксимацию Парето-кривой как R.

Применим алгоритм 1 к парам решений, полученным после локальной оптимизации, для решения следующих задач:

$$Z_2(W(x'_1, x'_2)), \ldots, Z_2(W(x'_{n-1}, x'_n)).$$

Из всех полученных решений выберем недоминируемые. Обозначим построенную из этих решений аппроксимацию Парето-кривой как Q.

Будем сравнивать количество точек, которые не доминируются соответствующей аппроксимацией и не совпадают по значению критерия с какой-либо точкой этой аппроксимации. Введем обозначение количества точек, которые не доминируются аппроксимацией A, следующим образом: $B(A) = \left|\{x | x$ – допустимое решение задачи Z_2, $\nexists x' \in A$ такого, что $C(x') \leqslant C(x)$ и $D(x') \leqslant D(x)\}\right|$. $B(R), B(Q)$ считались для каждого теста путем проверки (полным перебором) всего множества допустимых решений на соответствие условию несуществования доминирующего или равного по значению критериев решения в соответствующей аппроксимации. Тесты проводились на размерностях $n = 6, 7, 8$, для каждой размерности было проведено 50 тестов.

В табл. 1 приведены результаты первого вычислительного эксперимента. Согласно им применение алгоритма 1 позволило в среднем уменьшить количество недоминируемых точек на 6,57%.

Таблица 1

Размерность задачи	$\frac{B(R)-B(Q)}{B(R)}100\%$
6	2,14%
7	8,03%
8	9,54%

Эксперимент 2. Построим матрицы c_{ijk}, d_{ijk} следующим способом: для каждого индекса $i \in I \cup J \cup K$ сгенерируем случайную точку p на плоскости XY так, чтобы p_x, p_y были целочисленными и равномерно распределенными на отрезке $[0{,}2^{32} - 1]$, тогда $c_{ijk} = dist(i,j) + dist(j,k) + dist(i,k), d_{ijk} = \max(dist(i,j), dist(j,k), dist(i,k))$, где $dist(a,b)$ – Манхэттенское расстояние между точками a и b.

Построим n^3 случайных решений $x_1, \ldots, x_{n^3}$ задачи Z_2, к каждому из которых применим один шаг предложенной выше процедуры локальной оптимизации. Полученные решения обозначим как $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n^3}$. Из полученных решений выберем недоминируемые. Обозначим построенную из этих решений аппроксимацию Парето-кривой как R.

Применим алгоритм 1 к парам решений, полученным после локальной оптимизации, для решения следующих задач:

$$Z_2(W(x'_1, x'_2)), \ldots, Z_2(W(x'_{n^3-1}, x'_{n^3})).$$

Из всех полученных решений выберем недоминируемые. Обозначим построенную из этих решений аппроксимацию Парето-кривой как Q.

Будем сравнивать количество точек, которые не доминируются соответствующей аппроксимацией и не совпадают по значению критерия с какой-либо точкой этой аппроксимации.

Тесты проводились на размерностях $n = 6, 7, 8$, было проведено 50 тестов.

Таблица 2

Размерность задачи	$\frac{B(R)-B(Q)}{B(R)}100\%$
6	11,44%
7	18,08%
8	11,71%

В табл. 2 приведены результаты второго вычислительного эксперимента. Согласно им применение алгоритма 1 позволило в среднем уменьшить количество недоминируемых точек на 13,74%.

5. Заключение

В работе предложен алгоритм построения Парето-оптимальных решений задачи комбинирования двух допустимых решений двухкритериальной трехиндексной задачи о назначениях. Доказана корректность построенного алгоритма и получена квадратичная оценка его сложности. Данный алгоритм может быть применен в качестве дополнительного шага в эвристических подходах оценки области Парето двухкритериальной трехиндексной задачи о назначениях. Приведены результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие повышение качества приближенных решений, полученных в результате постобработки предложенным алгоритмом оптимального комбинирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spieksma F.C.R.* Multi Index Assignment Problems. Complexity, Approximation, Applications. P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.) / Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 1–11.
2. *Burkard R., Dell'Amico M., Martello S.* Assignment problems: revised reprint. PA: SIAM, 2012.
3. *Kuroki Y., Matsui T.* An approximation algorithm for multidimensional assignment problems minimizing the sum of squared errors // Discret. Appl. Math. 2009. V. 157. No. 9. P. 2124–2135.

4. *Poore A.B.* Multidimensional Assignment Problems Arising in Multitarget and Multisensor Tracking. P.M. Pardalos, L.S. Pitsoulis (Eds.) / Nonlinear Assignment Problems: Algorithms and Applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 2000. P. 13–38.

5. *Zhuang Y., Zhou Y., Hassini E., Yuan Y., Hu X.* BRack retrieval and repositioning optimization problem in robotic mobile fulfillment systems // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review, 2022. V. 167. P. 102920.

6. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.

7. *Афраймович Л.Г.* Многоиндексные транспортные задачи с 2-вложенной структурой // АиТ. 2013. № 1. С. 116–134.
Afraimovich L.G. Multiindex Transportation Problems with 2-embedded Structure // Autom. Remote Control. 2013. V. 74. No. 1. P. 90–104.

8. *Bandelt H.J., Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation algorithms for multidimensional assignment problems with decomposable costs // Discret. Appl. Math. 1994. V. 49. P. 25–50.

9. *Crama Y., Spieksma F.C.R.* Approximation Algorithms for Three-Dimensional Assignment Problems with Triangle Inequalities // Eur. J. Oper. Res. 1992. V. 60. P. 273–279.

10. *Burkard R.E., Rudolf R., Woeginger G.J.* Three-dimensional axial assignment problems with decomposable cost coefficients // Discret Appl. Math. 1996. V. 65. P. 123–139.

11. *Spieksma F., Woeginger G.* Geometric three-dimensional assignment problems // Eur. J. Oper. Res. 1996. V. 91. P. 611–618.

12. *Ćustić A., Klinz B., Woeginger G.J.* Geometric versions of the three-dimensional assignment problem under general norms // Discret. Optim. 2015. V. 18. P. 38–55.

13. *Balas E., Saltzman M.J.* An Algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Oper. Res. 1991. V. 39. No. 1. P. 150–161.

14. *Natu S., Date K., Nagi R.* GPU-accelerated Lagrangian heuristic for multidimensional assignment problems with decomposable costs // Parallel Comput. 2020. V. 97. P. 102666.

15. *Huang G., Lim A.* A hybrid genetic algorithm for the Three-Index Assignment Problem // Eur. J.Oper. Res. 2006. V. 172. P. 249–257.

16. *Kim B.J., Hightower W.L., Hahn P.M., Zhu Y.R., Sun L.* Lower bounds for the axial three-index assignment problem // Eur. J.Oper. 2010. V. 202. P. 654–668.

17. *Дичковская С.А., Кравцов М.К.* Исследование полиномиальных алгоритмов решения многокритериальной трехиндексной планарной задачи о назначениях // Журн. вычислит. мат. и мат. физики. 2007. Т. 47. 6. С. 1077–1086.

18. *Емеличев В.А., Перепелица В.А.* Сложность дискретных многокритериальных задач // Дискретная математика. 1994. Т. 6. Вып. 1. С. 3–33.

19. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальные многоиндексные задачи объемнокалендарного планирования // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. 1. С. 78-82.

20. *Прилуцкий М.Х.* Многокритериальное распределение однородного ресурса в иерархических системах // АиТ. 1996. № 2. С. 24–29.

21. *Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.* Комбинирование решений аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. No. 8. С. 159–168.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Combining solutions of the axial assignment problem // Autom. Remote Control, 2021. V. 82. No. 8. P. 1418–1425.
22. *Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.* Эвристические стратегии комбинирования решений трехиндексной аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2021. № 10. С. 6–12.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Heuristic Strategies for Combining Solutions of the Three-Index Axial Assignment Problem // Autom. Remote Control, 2021. V. 82. No. 10. 1635–1640.
23. *Afraimovich L.G., Emelin M.D.* Complexity of Solutions Combination for the Three-Index Axial Assignment Problem // Mathematics 2022. V. 10. No. 7. 1062.
24. *Афраймович Л.Г., Емелин М.Д.* Свертки критериев при комбинировании решений многокритериальной аксиальной задачи о назначениях // АиТ. 2024. № 8. С. 86–98.
Afraimovich L.G., Emelin M.D. Convolution of criteria of a multicriterial axial assignment problem // Autom. Remote Control, 2024. V. 85. No. 8. P. 809–818.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Поступила в редакцию 10.11.2024

После доработки 12.02.2025

Принята к публикации 26.02.2025